波動写像の特異点 (偏微分方程式の解の適切性と正則性に関する研究)

太田, 雅人

数理解析研究所講究録 1284 巻 2002 年 61-71

波動写像の特異点

静岡大学工学部　太田 雅人 (Masahito Ohta)

Faculty of Engineering, Shizuoka University

企画者の三沢正史氏からの要請に従い, 中西賢次氏との共著論文 [4] の紹介をする. ここで考える問題は, 波動写像を局所座標系で書いた半線形波動方程式系

$$(\partial_t^2-\Delta)u^i+\sum_{j,k=1}^{N}\Gamma_{j,k}^i(u)(\partial_t u^j\partial_t u^k-\nabla u^j\nabla u^k)=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}, \tag{1}$$

$1\le i\le N$, に対する初期値問題の非適切性であり, 与えられた講演題目「波動写像の特異点」とは必ずしも合致していないことを始めにお断りしておく.

(1) に対する初期値問題の適切性に関するこれまでの結果を纏めると

- $s>n/2$, $n\ge 2$ のとき, Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^n)\oplus H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ において時間局所的に適切である ([1] for $n=3$, [2] for $n\ge 2$).

- $n\ge 2$ のとき, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{2,1}^{n/2}(\mathbb{R}^n)\oplus\dot{B}_{2,1}^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ における小さいデータに対して時間大域的に適切である ([5] for $n\ge 4$, [6] for $n=2,3$, [4] for $N=1$, $n\ge 2$).

- $n\ge 1$, $N=1$, $r>1$ のとき, Besov 空間 $B_{2,r}^{n/2}(\mathbb{R}^n)\oplus B_{2,r}^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ における小さいデータに対して時間局所的に適切でない ([4]). ここで, $B_{2,2}^s=H^s$ に注意する.

- $n=1$, $N=1$ のとき, $B_{2,1}^{1/2}(\mathbb{R})\oplus\dot{B}_{2,1}^{-1/2}(\mathbb{R})$ における小さいデータに対して時間局所的に適切でない ([3]).

以下では, 3番目の結果について述べる. $N=1$ の場合 (単独方程式) を考えるので (1) を

$$(\partial_t^2-\Delta)u+f(u)(|\partial_t u|^2-|\nabla u|^2)=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}^{1+n} \tag{2}$$

と書き替える. ここで, $u = u(t,x)$ と $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ は実数値関数である. よく知られているように, (2) は Cole-Hopf-Nirenberg 変換

$$v = G(u) := \int_0^u \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds$$

によって線形の波動方程式 $(\partial_t^2 - \Delta)v = 0$ に変換される. また, $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$, $G'(u) = \exp\left(\int_0^u f(r)dr\right) > 0$ だから

$$a := \lim_{u \to -\infty} G(u), \quad b := \lim_{u \to +\infty} G(u)$$

とおくと, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ であり, $G : \mathbb{R} \to (a,b)$ は C^∞ 級微分同相である.

今回紹介するのは次の定理である.

定理 1 ([4, Theorem 4.5]) $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ とし, $a > -\infty$ または $b < +\infty$ を仮定する. このとき, 任意の $r > 1$, $\varepsilon > 0$ に対して, $\|\varphi\|_{B^{n/2}_{2,r}} + \|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \varepsilon$ なる関数 $(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^2$, $0 < T < \varepsilon$ なる T と $\mathbb{R}^n$ の球 Q が存在して, $u(0) = \varphi$, $\partial_t u(0) = \psi$ なる (2) の古典解 $u(t,x)$ は $0 \leq t < T$ で存在して, $t = T$ において次の意味で爆発する:

$$\lim_{t \to T-0} \inf_{x \in Q} |u(t,x)| = \infty.$$

以下で使う記号を定義し, 定理 1 の証明を述べる.

記号 $H := G^{-1} : (a,b) \to \mathbb{R}$.

$$m := \begin{cases} n/2 + 1/2, & n \text{ が奇数のとき}, \\ n/2 + 1, & n \text{ が偶数のとき}. \end{cases}$$

$$W_{t_0}(f,g) : \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)v = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \\ v(t_0) = f, \quad \partial_t v(t_0) = g, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \text{ の解.}$$

$\tilde{f}(\xi)$: $f(x)$ の Fourier 変換.

$$\|f\|_{B^\sigma_{2,r}} := \|\tilde{f}\|_{L^2(|\xi|<1)} + \left\| 2^{j\sigma} \|\tilde{f}\|_{L^2(2^{j-1} \leq |\xi| < 2^j)} \right\|_{\ell^r(j \in \mathbb{N})}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq \infty.$$

定理１の証明　証明が長いので $\boxed{0}$〜$\boxed{7}$ の８段階に分ける.

$\boxed{0}$　一般性を失うことなく, $-a \geq b < \infty$ と仮定してよい. Sobolev の埋込定理より

$$\exists C_0 \geq 1 \text{ s.t. } \|g\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \leq C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}}, \quad \|g\|_{L^\infty} \leq C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}}.$$

また, 補題２より $\exists\delta \in (0,1)$ s.t.

$$\|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + \|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \delta \Rightarrow \|H(\varphi)\|_{B^{n/2}_{2,r}} + \|H'(\varphi)\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \varepsilon. \tag{0.1}$$

実際, 補題２ (i) より

$$\begin{aligned}
&\|H(\varphi)\|_{B^{n/2}_{2,r}} \leq \|H(\varphi)\|_{B^{n/2}_{2,1}} \leq \|H(\varphi)\|_{L^2} + \|H(\varphi)\|_{\dot{B}^{n/2}_{2,1}} \\
&\leq \|H'(\varphi)\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2} + C\sum_{\ell=1}^{m}\|H^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty}\|\varphi\|^{\ell}_{\dot{B}^{n/2}_{2,1}} \\
&\leq C\|H'(\varphi)\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + C\sum_{\ell=1}^{m}\|H^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty}\|\varphi\|^{\ell}_{H^{n/2+1/2}}.
\end{aligned}$$

ここで, $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C_0\|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} \leq C_0\delta$ だから

$$\|H(\varphi)\|_{B^{n/2}_{2,r}} \leq C\sup_{|\lambda|\leq C_0\delta}|H'(\lambda)|\|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + C\sum_{\ell=1}^{m}\sup_{|\lambda|\leq C_0\delta}|H^{(\ell)}(\lambda)|\|\varphi\|^{\ell}_{H^{n/2+1/2}}.$$

また, 補題２ (ii) より

$$\begin{aligned}
&\|H'(\varphi)\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} = \|\psi + (H'(\varphi)-1)\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \\
&\leq \|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} + \|(H'(\varphi)-1)\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \\
&\leq \|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} + \|H'(\varphi)-1\|_B\|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}}.
\end{aligned}$$

ここで, $n=1$ のときは $B = H^m(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R})$ で, $n \geq 2$ のときは $B = \dot{B}^{n/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ である. さらに,

$$\|H'(\varphi)-1\|_B \leq C\sum_{\ell=1}^{m}\|H^{(\ell+1)}(\varphi)\|_{L^\infty}\|\varphi\|^{\ell}_B \leq C\sum_{\ell=1}^{m}\sup_{|\lambda|\leq C_0\delta}|H^{(\ell+1)}(\lambda)|\|\varphi\|^{\ell}_{H^{n/2+1/2}}.$$

以上より, $\delta > 0$ を十分小さく取れば, (0.1) が成り立つことが示された.

$\boxed{1}$ $0 \le \chi_1 \le 1$, $\chi_1(s) = 0$ for $|s| \ge \pi/3$, $\chi_1(s) = 1$ for $|s| \le \pi/6$ なる $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ と $N < M$ なる $N, M \in \mathbb{N}$ に対して $\psi_1 \in \mathcal{S}$ を

$$\tilde{\psi}_1(\xi) := \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k \chi_1\left(|\xi| - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right), \quad a_k = \frac{1}{k^{n-1}j} \ \text{ if } \ 2^j \le k < 2^{j+1}$$

と定義し, $v_1 := W_0(0, \psi_1)$ とおく. このとき N と M を十分大きく取れば

$$v_1(1,0) \ge b+1, \quad \|\psi_1\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \delta/9 \tag{1.1}$$

が成り立つ. 実際,

$$v_1(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \tilde{\psi}_1(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

より

$$v_1(1,0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} \tilde{\psi}_1(\xi)\, d\xi \ge C \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k \int_{\pi/3+2\pi k}^{2\pi/3+2\pi k} \frac{1}{r} r^{n-1}\, dr$$
$$\ge C \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k k^{n-2} \ge C \sum_{j=N}^{M-1} \frac{1}{j} \sum_{2^j \le k < 2^{j+1}} \frac{1}{k} \ge C \sum_{j=N}^{M-1} \frac{1}{j} \sim \log \frac{M}{N}.$$

ここで,

$$\sum_{2^j \le k \le 2^{j+1}} \frac{1}{k} \sim \log \frac{2^{j+1}}{2^j} = \log 2$$

であることを用いた. また

$$\|\psi_1\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} = \|2^{(n/2-1)j} \|\tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-1} \le |\xi| < 2^j)}\|_{\ell^r(j \in \mathbf{N})}$$
$$\le C \|2^{(n/2-1)j} (\sum_{2^j \le k < 2^{j+1}} a_k^2 \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} r^{n-1}\, dr)^{1/2}\|_{\ell^r(N \le j < M)}$$
$$\le C \|(\sum_{2^j \le k < 2^{j+1}} a_k^2 k^{2(n/2-1)} k^{n-1})^{1/2}\|_{\ell^r(N \le j < M)}$$
$$\le C \|\frac{1}{j} (\sum_{2^j \le k < 2^{j+1}} \frac{1}{k})^{1/2}\|_{\ell^r(N \le j < M)} \le C \|\frac{1}{j}\|_{\ell^r(N \le j < M)}$$
$$\le C (\int_N^\infty \frac{ds}{s^r})^{1/r} \le C N^{1/r-1}.$$

$r > 1$ だから, N と M を適当に大きく取れば (1.1) が成り立つことが分かる.

$\boxed{2}$ $K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_2 = 2^{-K} < \varepsilon$, $v_2(t,x) := v_1(t/\varepsilon_2, x/\varepsilon_2) = W_0(0,\psi_2)$, $\psi_2(x) = \psi_1(x/\varepsilon_2)/\varepsilon_2$ とすると,

$$v_2(\varepsilon_2, 0) = v_1(1,0) \geq b+1, \quad \|\psi_2\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} = \|\psi_1\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \frac{\delta}{9}$$

が成り立つ. 実際, $\tilde{\psi}_2(\xi) = \tilde{\psi}_1(\xi) = 0$ if $|\xi| < 1$, $\tilde{\psi}_2(\xi) = \varepsilon_2^{n-1}\tilde{\psi}_1(\varepsilon_2\xi)$ より

$$\begin{aligned}
\|\psi_2\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} &= \|2^{(n/2-1)j}\varepsilon_2^{n-1}\|\tilde{\psi}_1(\varepsilon_2\xi)\|_{L^2(2^{j-1}\leq|\xi|<2^j)}\|_{\ell^r(j\in\mathbb{N})} \\
&= \|2^{(n/2-1)j-(n-1)K+nK/2}\|\tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-K-1}\leq|\xi|<2^{j-K})}\|_{\ell^r(j\in\mathbb{N})} \\
&= \|2^{(n/2-1)(j-K)}\|\tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-K-1}\leq|\xi|<2^{j-K})}\|_{\ell^r(j\in\mathbb{N})} = \|\psi_1\|_{B^{n/2-1}_{2,r}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} < \delta/(9C_0)$ なる $\psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとり, $v_3 := W_0(0,\psi_3)$ とおくと, $v_3(\varepsilon_2, 0) > b$ が成り立つ. 実際, $\boxed{2}$ と

$$\begin{aligned}
&|v_2(\varepsilon_2,0) - v_3(\varepsilon_2,0)| \leq \|v_2(\varepsilon_2) - v_3(\varepsilon_2)\|_{L^\infty} \\
&\leq C_0\|v_2(\varepsilon_2) - v_3(\varepsilon_2)\|_{H^{n/2+1/2}} \leq C_0\varepsilon_2\|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} < \frac{\delta}{9}\varepsilon_2,
\end{aligned}$$

より

$$v_3(\varepsilon_2,0) \geq v_2(\varepsilon_2,0) - \frac{\delta}{9}\varepsilon_2 \geq b+1-\frac{\delta}{9}\varepsilon_2 > b.$$

これから,

$\exists T \in (0,\varepsilon_2)$ s.t. $\|v_3(t)\|_{L^\infty} < b$ for $0 \leq t < T$, $\|v_3(T)\|_{L^\infty} = b$.

このとき一般性を失うことなく

$\exists X \in \mathbb{R}^n$ s.t. $v_3(T,X) = b$, $\partial_t v_3(T,X) \geq 0$

としてよい. また, 有限伝播性より

$\exists R_3 > 0$ s.t. $v_3(t,x) = 0$ if $0 \leq t \leq T$ and $|x| \geq R_3$.

$\chi_3(x) = 1$ for $|x| \leq R_3 + T$ なる $\chi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $M_3 := \max\{\|\chi_3\|_{H^{n/2+1/2}}, 1\}$ とおき, $\varepsilon_3 \in (0,1)$ を $C_0M_3\varepsilon_2\varepsilon_3 < b/2$, $C_0M_3\varepsilon_3 < \delta/9$ ととる.

$\boxed{4}$ $v_4 := v_3 + W_0(0, \varepsilon_3\chi_3)$ とおくと, $v_4(t,x) = v_3(t,x) + \varepsilon_3 t$ if $0 \le t \le T$, $|x| \le R_3$, $v_4(t,x) = W_0(0,\varepsilon_3\chi_3)$ if $0 \le t \le T$, $|x| \ge R_3$ より

$$\min_{0\le t\le T, |x|\le R_3} v_4(t,x) = \min_{0\le t\le T, |x|\le R_3} \{v_3(t,x) + \varepsilon_3 t\} > -b,$$

$$\sup_{0\le t\le T, |x|\ge R_3} |v_4(t,x)| \le C_0 \|\varepsilon_3\chi_3\|_{H^{n/2+1/2}} T \le C_0\varepsilon_3 M_3 \varepsilon_2 < \frac{b}{2}.$$

これと $\partial_t v_4(T,X) = \partial_t v_3(T,X) + \varepsilon_3 > 0$ より

$\exists \delta_4 \in (0, \min\{\varepsilon_2, b\})$ s.t.

$$\inf_{0\le t\le T, x\in\mathbb{R}^n} v_4(t,x) \ge -b + \delta_4, \quad \partial_t v_4(t,x) > 0 \text{ if } |x - X| + |t - T| < \delta_4.$$

また, $v_4(T,X) = v_3(T,X) + \varepsilon_3 T = b + \varepsilon_3 T > \|v_4(t)\|_{L^\infty}$ for $0 \le t < T$.

$\boxed{5}$ $v_5 := \dfrac{b}{v_4(T,X)} v_4$ とおくと,

$$\|v_5(t)\|_{L^\infty} = \frac{b}{v_4(T,X)} \|v_4(t)\|_{L^\infty} < b, \quad 0 \le t < T, \quad v_5(T,X) = b,$$

$$\partial_t v_5(t,x) > 0 \text{ for } |x - X| + |t - T| < \delta_4, \quad \inf_{0\le t\le T, x\in\mathbb{R}^n} v_5(t,x) \ge -b + \delta_4.$$

有限伝播性より

$\exists R_5 > 0$ s.t. $v_5(t,x) = 0$ if $0 \le t \le T$ and $|x| \ge R_5$.

$\chi_5(x) = 1$ for $|x| \le R_5 + T$ なる $\chi_5 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $M_5 := \max\{\|\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}, 1\}$ とおき, $\varepsilon_5 \in (0, \delta_4/4)$ を $C_0\varepsilon_5 + 8C_0^2 M_5 \varepsilon_2\varepsilon_5/\delta_4 < \min\{\delta_4, \delta/9\}$ ととる. 補題 3 より

$\exists g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists \delta_5 > 0$ s.t. $\|g\|_{H^{n/2+3/2}} < \varepsilon_5$, $g(x) = 0$ for $|x - X| \ge \varepsilon_5$,

$$v_5(T,x) + g(x) = b \text{ for } |x - X| \le \delta_5, \quad v_5(T) + g \le b.$$

$\boxed{6}$ $v_6 := W_T(v_5(T) + g, \partial_t v_5(T))$, $\varepsilon_6 := 4C_0\varepsilon_5/\delta_4$ とおくと

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} v_6(t,x) \le b + \varepsilon_6(T - t) \text{ for } 0 \le t \le T \tag{6.1}$$

が成り立つ. 実際, (i) $T-\delta_4/4 \le t \le T$, $|x-X| \le \delta_4/2$ のとき, $\partial_t v_5(t,x) \ge 0$ より $\partial_t v_6(t,x) - \partial_t v_5(t,x) \le \partial_t v_6(t,x)$. よって, $v_6(T,x) = v_5(T,x) + g(x) \le b$ に注意すると

$$\begin{aligned} v_6(t,x) &\le v_6(T,x) + \int_t^T |\partial_t v_5(s,x) - \partial_t v_6(s,x)| ds \\ &\le v_6(T,x) + \int_t^T \|\partial_t v_5(s) - \partial_t v_6(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\le b + C_0 \int_t^T \|\partial_t (v_5(s) - v_6(s))\|_{H^{n/2+1/2}} ds \\ &\le b + C_0(T-t)\|g\|_{H^{n/2+3/2}} ds \le b + C_0(T-t)\varepsilon_5 \le b + \varepsilon_6(T-t). \end{aligned}$$

(ii) $T-\delta_4/4 \le t \le T$, $|x-X| \ge \delta_4/2$ のとき, $g(x)=0$ for $|x-X| \ge \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 < \delta_4/4$ より $v_6(t,x) = v_5(t,x) \le b$. (iii) $0 \le t \le T-\delta_4/4$ のとき,

$$\begin{aligned} v_6(t,x) &\le v_5(t,x) + C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}} \\ &\le b + +C_0\varepsilon_5 \le b + C_0(T-t)\frac{4\varepsilon_5}{\delta_4} = b + \varepsilon_6(T-t). \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より, (6.1) が示された. また, 次の関係にも注意する.

$$C_0\varepsilon_5 + 2C_0 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_6 < \min\{\delta_4, \delta/9\}.$$

$\boxed{7}$ $v_7 := W_T(v_6(T), \partial_t v_6(T) + 2\varepsilon_6\chi_5)$ とおくと, $v_7 = W_T(v_5(T)+g, \partial_t v_5(T) + 2\varepsilon_6\chi_5) = v_5 + W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)$ より

$$|x-X| \le \delta_5 \Rightarrow v_7(T,x) = v_5(T,x) + g(x) = b. \tag{7.1}$$

また,

$$\|v_7(t)\|_{L^\infty} < b \text{ for } 0 \le t < T \tag{7.2}$$

が成り立つ. 実際, (i) $0 \le t < T$, $|x| \le R_5$ のとき,

$$\begin{aligned} v_7(t,x) &= v_6(t,x) + 2\varepsilon_6(t-T) \\ &\le b + \varepsilon_6(T-t) - 2\varepsilon_6(T-t) = b - \varepsilon_6(T-t) < b. \end{aligned}$$

(ii) $0 \le t < T$, $|x| \ge R_5$ のとき, $v_7(T,x) = v_5(T,x) + g(x) = g(x)$, $\partial_t v_7(T,x) = \partial_t v_5(T,x) + 2\varepsilon_6\chi_5(x) = 2\varepsilon_6\chi_5(x)$ より

$$|v_7(t,x)| \le C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0\|2\varepsilon_6\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}T$$
$$\le C_0\varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5\varepsilon_2 < \delta_4 < b.$$

(iii) $0 \le t \le T$ のとき,

$$|v_5(t,x) - v_7(t,x)| \le C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0\|2\varepsilon_6\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}T$$
$$\le C_0\varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5\varepsilon_2$$

より

$$v_7(t,x) \ge \inf_{0\le t\le T, x\in\mathbf{R}^n} v_5(t,x) - C_0\varepsilon_5 - 2C_0M_5\varepsilon_2\varepsilon_6$$
$$\ge \inf_{0\le t\le T, x\in\mathbf{R}^n} v_4(t,x) - C_0\varepsilon_5 - \frac{8C_0^2M_5\varepsilon_2\varepsilon_5}{\delta_4}$$
$$\ge -b + \delta_4 - C_0\varepsilon_5 - \frac{8C_0^2M_5\varepsilon_2\varepsilon_5}{\delta_4} > -b.$$

(i), (ii), (iii) より (7.2) が示された. 最後に

$$\|v_7(0)\|_{H^{n/2+1/2}} + \|\partial_t v_7(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < \delta \tag{7.3}$$

を示す. $v_7 = v_5 + W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)$, $v_5(0) = 0$ より

$$\|v_7(0)\|_{H^{n/2+1/2}} \le \|g\|_{H^{n/2+1/2}} + \|2\varepsilon_6\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}T$$
$$\le \varepsilon_5 + 2\varepsilon_6M_5\varepsilon_2 \le C_0\varepsilon_5 + 2C_0M_5\varepsilon_2\varepsilon_6 < \frac{\delta}{9}.$$

また

$$\|\partial_t v_7(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \le \|\partial_t v_5(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} + \|W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}}.$$

ここで

$$\partial_t v_5(0) = \frac{b}{v_4(T,X)}\partial_t v_4(0) = \frac{b}{v_4(T,X)}(\psi_3 + \varepsilon_3\chi_3)$$

$$\|\partial_t v_5(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \le \|\psi_3\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} + \|\varepsilon_3\chi_3\|_{B^{n/2-1}_{2,r}}$$
$$\le \|\psi_2\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} + C_0\|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0\varepsilon_3\|\chi_3\|_{H^{n/2+1/2}}$$
$$< \frac{\delta}{9} + \frac{\delta}{9} + C_0\varepsilon_3 M_3 < \frac{3}{9}\delta.$$

また

$$\|W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \le C_0\|W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)(0)\|_{H^{n/2+1/2}}$$
$$\le C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0\|2\varepsilon_6\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}T$$
$$\le C_0\varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5\varepsilon_2 < \frac{\delta}{9}.$$

よって $\|\partial_t v_7(0)\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} < 4\delta/9$ が成り立つ. これで (7.3) が示された.

結論として, (0.1), (7.1), (7.2), (7.3) より, $u(t,x) = H(v_7(t,x))$ は定理 1 の条件をすべてみたす (2) の解であることが分かる. (証明終)

補題 2 ([4, Lemma 3.1]) $n \in \mathbb{N}$, $r \ge 1$, $F \in C^m(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$ とし, B を $\dot{B}^{n/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ または $H^m(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき 定数 $C = C(n) > 0$ が存在して以下の評価が成り立つ.

(i) $\|F(\varphi)\|_B \le C \sum_{\ell=1}^{m} \|F^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_B^\ell$,

(ii) $\|\varphi\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}} \le C\|\varphi\|_B \|\psi\|_{B^{n/2-1}_{2,r}}$. 但し, $n = 1$ かつ $B = \dot{B}^{n/2}_{2,1}$ の場合は除く.

補題 2 の証明は省略する.

補題 3 ([4, Lemma 4.3]) $M \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \le M$, $\varphi(X) = M$ とする. このとき $\forall\varepsilon > 0$, $\exists g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists\delta > 0$ s.t. $\|g\|_{H^{n/2+3/2}} < \varepsilon$, $g(x) = 0$ for $|x - X| \ge \varepsilon$,

$$\varphi(x) + g(x) = M \text{ for } |x - X| \le \delta, \quad \varphi + g \le M.$$

補題 3 の証明 $0 \le \chi(x) \le 1$, $\chi(x) = 0$ if $|x| \ge 2$, $\chi(x) = 1$ if $|x| \le 1$ なる $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$g(x) := \chi\left(\frac{x-X}{\delta}\right)(M-\varphi(x)), \quad \delta > 0$$

とおく. このとき

$$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad g(x) = 0 \text{ for } |x-X| \geq 2\delta,$$

$$\varphi + g \leq M, \quad \varphi(x) + g(x) = M \text{ for } |x-X| \leq \delta.$$

また $\varphi(X) = M = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x)$ より, $\nabla\varphi(X) = 0$. 任意の $\mu \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|g\|_{H^\mu} &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha+\beta\leq\mu} \|(\partial_k^\alpha\chi)(\frac{x-X}{\delta})\delta^{-\alpha}\partial_k^\beta(M-\varphi)\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha+\beta\leq\mu} \|\partial_k^\alpha\chi\|_{L^2}\delta^{-\alpha+n/2}\|\partial_k^\beta(M-\varphi)\|_{L^\infty(|x-X|\leq 2\delta)} \\ &\leq C \sum_{\alpha+\beta\leq\mu} \delta^{-\alpha+n/2}\delta^{2-\beta} \leq C\delta^{n/2+2-\mu}.\end{aligned}$$

ここで, C は μ, n, χ, φ には依るが δ には依らない正定数である. n が奇数のときは, $\mu = n/2 + 3/2$ とし, δ を十分小さく取ればよい. n が偶数のときは, 複素補間 $[H^{n/2+1}, H^{n/2+2}]_{1/2} = H^{n/2+3/2}$ より望みの結果を得る. (証明終)

References

[1] S. Klainerman and M. Machedon, Smoothing estimates for null forms and applications, Duke Math. J. **81** (1995) 99–133.

[2] S. Klainerman and S. Selberg, Remarks on the optimal regularity for equations of wave maps type, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997) 901–918.

[3] K. Nakanishi, Local wellposedness and illposedness in the critical Besov spaces for semilinear wave equations with quadratic forms, Funkcialaj Ekvacioj **42** (1999) 261–279.

[4] K. Nakanishi and M. Ohta, On global existence of solutions to nonlinear wave equations of wave map type, Nonlinear Anal. **42** (2000) 1231–1252.

[5] D. Tataru, Local and global results for wave maps I, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998) 1781–1793.

[6] D. Tataru, On global existence and scattering for the wave maps equation, Amer. J. Math. **123** (2001) 37–77.